Définitions et Notations

On désigne par n un entier ≥ 1. Pour tout réel a, sa partie positive, $\max(0,\, a)$, est notée a_+, et on note $a_+^2 = (a_+)^2$ le carré de a_+. On note $[a+b+c+\ldots]_+$ la partie positive de $a+b+c+\ldots$ Pour tout ensemble A, la fonction indicatrice de A est notée $\mathbf{1}_A$: $\mathbf{1}_A(x) = 1$ lorsque x appartient à A, et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon. On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à un. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, etc. On dira qu'une fonction $g : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}^+$ est une densité lorsque g est intégrable et que $\displaystyle\int_{[0,\,1]^n} g(x)\, dx = 1$. On dit qu'une fonction $f : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}$ est convexe lorsque pour tout x et tout y de $[0,\, 1]^n$ et pour tout réel λ compris entre 0 et 1, on a

$$f\left(\lambda x \,+\, (1-\lambda)\, y\right) \;\leq\; \lambda f\left(x\right) \,+\, (1-\lambda)\, f\left(y\right) .$$

Elle est concave quand $-f$ est convexe. De même, on dit qu'une fonction $f :]0,\, +\infty[\to \mathbb{R}$ est convexe lorsque pour tout s et tout t de $]0,\, +\infty[$ et pour tout λ compris entre 0 et 1, on a

$$f\left(\lambda s \,+\, (1-\lambda)\, t\right) \;\leq\; \lambda f\left(s\right) \,+\, (1-\lambda)\, f\left(t\right) .$$

On rappelle l'inégalité de Jensen sous la forme suivante, dont on ne demande pas de démonstration :

“ Si Ψ est une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une densité, alors, à condition que les intégrales concernées soient définies et que f soit à valeurs dans I,

$$\Psi\left(\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, g(x)\; dx\right) \;\leq\; \int_{[0,\,1]^n} \Psi\left(f(x)\right) g(x)\; dx \, . \text{ ”}$$

Soient $g : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}^+$ une densité et $m : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}^+$ une fonction (borélienne), toutes deux à valeurs > 0, telles que les fonctions produits mg et $m\left|\ln m\right| g$ soient intégrables. On pose

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}_g\left(m\right) \;&=\; \int_{[0,\,1]^n} m(x)\, \ln m\left(x\right)\; g(x)\; dx \\ &\qquad - \left(\int_{[0,\,1]^n} m(x) g(x)\, dx\right)\left(\ln \int_{[0,\,1]^n} m(x) g(x)\, dx\right) . \end{aligned} \tag{1}$$

I. Entropie et variation totale

On établit dans cette partie des inégalités qui seront utilisées dans les parties II à VI.

I.1 Signe de l'entropie

On a défini $\mathrm{Ent}_g(m)$ en (**??**).

a) La fonction définie par $\Psi(x) = x \ln x$ est-elle convexe sur $]0,\, +\infty[$? Pourquoi ?

b) Montrer en utilisant l'inégalité de Jensen que $\mathrm{Ent}_g(m) \geq 0$.

I.2 Inégalités auxiliaires

On introduit les fonctions $J \; : \;]0,\, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $K \; : \;]0,\, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$J(u) \;=\; u \ln u \;-\; u \;+\; 1 \quad \text{et} \quad K(u) \;=\; \frac{J(u)}{u}, \qquad u > 0\,,$$

et on prolonge J en 0 par $J(0) = 1$.

a) Montrer que

$$J(u) \;\geq\; \frac{1}{2}\,(1 \;-\; u)^2 \quad \text{pour tout } u \in [0,\, 1]\,. \tag{2}$$

b) Montrer que

$$K(u) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(1 \;-\; \frac{1}{u}\right)^2 \quad \text{pour tout } u \geq 1\,. \tag{3}$$

c) Montrer que pour tout $u > 0$,

$$u \ln u \;-\; u \;+\; 1 \;\geq\; \frac{1}{2}\,[1 \;-\; u]_+^2 \;+\; \frac{u}{2}\left[1 \;-\; \frac{1}{u}\right]_+^2 . \tag{4}$$

d) Montrer que si h et g sont deux densités définies sur $[0,\, 1]^n$, toutes deux à valeurs > 0, et si la fonction

$$x \longmapsto h(x)\, \ln\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)$$

est intégrable, alors on a

$$\mathrm{Ent}_g\left(\frac{h}{g}\right) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} \ln\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right) h(x)\, dx\,. \tag{5}$$

Exprimer, pour tout réel $t > 0$, $\mathrm{Ent}_g(t\, m)$ en fonction de t et de $\mathrm{Ent}_g(m)$.

e) Pour des densités r et q définies sur $[0,\, 1]^n$ et à valeurs > 0, on définit

$$\delta\,(r \mid q) \;=\; \left(\int_{[0,\,1]^n} \left[1 \;-\; \frac{r(x)}{q(x)}\right]_+^2 q(x)\; dx\right)^{1/2} . \tag{6}$$

Montrer que

$$\delta^2\,(r \mid q) \;+\; \delta^2\,(q \mid r) \;\leq\; 2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right) . \tag{7}$$

I.3 Formule pour d_{VT}

L'écart de la variation totale $d_{\mathrm{VT}}(q,\, r)$ entre les densités q et r est défini par

$$d_{\mathrm{VT}}(q,\, r) \;=\; \sup_{0 \leq f \leq 1} \left| \int_{[0,\,1]^n} f(x)\, q(x)\; dx \;-\; \int_{[0,\,1]^n} f(y)\, r(y)\; dy \right| , \tag{8}$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions (boréliennes) f à valeurs dans $[0,\, 1]$.

a) Montrer que

$$\int_{[0,\,1]^n} [q(x) \;-\; r(x)]_+\, dx \;=\; \frac{1}{2} \int_{[0,\,1]^n} |q(x) \;-\; r(x)|\; dx\,. \tag{9}$$

b) Montrer que $d_{VT}(q, r)$ vérifie

$$d_{\mathrm{VT}}(q, r) = \frac{1}{2}\int_{[0,1]^n} |q(x) - r(x)|\, dx. \tag{10}$$

II. Démonstration de l'inegalité principale pour $n = 1$

*Cette partie utilise des résultats obtenus dans la partie I. Elle peut être traitée sans que la partie I ait été achevée, quitte à admettre certains des résultats énoncés en I. Son résultat final (**??**), admis dans le cas général, permet de traiter les parties IV et V.*

Soit $\mathbb{B}_{1\times 1}$ l'espace vectoriel des fonctions $h : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ bornées (et boréliennes). On dit que la forme linéaire Π sur $\mathbb{B}_{1\times 1}$ est positive si, lorsque $h \in \mathbb{B}_{1\times 1}$ prend des valeurs ≥ 0 alors $\Pi(h) \geq 0$. Soit $\mathcal{L}_{1\times 1}$ l'ensemble des formes linéaires Π sur $\mathbb{B}_{1\times 1}$ positives et telles que $\Pi(\mathbf{1}) = 1$. Pour toute forme linéaire Π de $\mathcal{L}_{1\times 1}$, on définit les formes linéaires positives Π_1 et Π_2 sur l'espace vectoriel $\mathbb{B}_1$ des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ bornées (et boréliennes), de la façon suivante :

$$\Pi_1(f) = \Pi(h) \text{ pour } h(x, y) = f(x) \quad \text{et} \quad \Pi_2(g) = \Pi(h) \text{ pour } h(x, y) = g(y).$$

On vérifie que $\Pi_1(\mathbf{1}) = \Pi_2(\mathbf{1}) = 1$. Lorsqu'il existe des densités ℓ_1 et ℓ_2 telles que

$$\Pi_1(f) = \int_0^1 \ell_1(x)\, f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \Pi_2(g) = \int_0^1 \ell_2(y)\, g(y)\, dy$$

pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{B}_1$, on appelle ℓ_1 et ℓ_2 des densités marginales de Π.

II.1 Unicité ?

Montrer que si $\Pi \in \mathcal{L}_{1\times 1}$ admet deux couples (k_1, k_2) et (ℓ_1, ℓ_2) de densités marginales, alors $k_1(x) = \ell_1(x)$ pour presque tout x, et $k_2(x) = \ell_2(x)$ pour presque tout x.

II.2 Étude d'une classe particulière

Soient $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables. Soit $\Lambda = \Lambda_{\phi,\psi}$ la forme linéaire sur $\mathbb{B}_{1\times 1}$ définie par

$$\Lambda(h) = \int_0^1 \phi(x)\, h(x, x)\, dx + \int_0^1 \int_0^1 \psi(x, y)\, h(x, y)\, dx\, dy. \tag{11}$$

a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur ϕ et ψ, Λ appartient-elle à $\mathcal{L}_{1\times 1}$?

b) Montrer que dans ce cas, Λ admet des densités marginales que l'on précisera.

II.3 Interprétation variationnelle de d_{VT}

Soient q et r deux densités à valeurs > 0, définies sur $[0, 1]$. On note $\mathcal{L}(q, r)$ l'ensemble des Π appartenant à $\mathcal{L}_{1\times 1}$, de densités marginales $\ell_1 = q$ et $\ell_2 = r$. Pour abréger l'écriture, on notera $\mathbf{1}_{x\neq y}$ la fonction $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_{x\neq y}(u, v) = 1$ pour $u \neq v$ et $\mathbf{1}_{x\neq y}(u, v) = 0$ pour $u = v$.

a) Montrer que pour toute forme linéaire Π de $\mathcal{L}(q, r)$,

$$d_{\mathrm{VT}}(q, r) \leq \Pi(\mathbf{1}_{x\neq y}). \tag{12}$$

b) On suppose que $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r) > 0$. Soit $\Lambda_0 = \Lambda_{\phi_0,\,\psi_0}$ la forme linéaire définie par (**??**) avec

$$\phi_0(x) = \min\left(q(x),\,r(x)\right) \quad \text{et} \quad \psi_0(x,\,y) = \frac{\left([q(x)-r(x)]_+\right)\,\left([r(y)-q(y)]_+\right)}{d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)}. \tag{13}$$

Montrer que $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(q,\,r)$ et calculer $\Lambda_0(\mathbf{1}_{x\neq y})$ en fonction de $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)$.

c) Déterminer $\inf\limits_{\Pi\in\mathcal{L}(q,\,r)} \Pi(\mathbf{1}_{x\neq y})$.

II.4 Inégalité principale dans le cas $n = 1$

Pour tout couple $(q,\,r)$ de densités à valeurs > 0 sur $[0,\,1]$, on définit l'écart

$$d_2\,(q|\,r) \;=\; \inf_{\Pi\in\mathcal{L}(q,\,r)}\;\sup_{\alpha}\;\Pi\left(h_{2,\,\alpha}\right) \tag{14}$$

avec $h_{2,\,\alpha}(x,\,y) \;=\; \alpha(y)\,\mathbf{1}_{x\neq y}$, la borne supérieure étant prise sur les fonctions bornées (et boréliennes) α telles que $\displaystyle\int_0^1 \alpha^2(y)r(y)\;dy \;\leq\; 1$. On définit de même $d_2(r|\,q)$ en intervertissant les rôles de q et r :

$$d_2\,(r|\,q) \;=\; \inf_{\Pi\in\mathcal{L}(q,\,r)}\;\sup_{\beta}\;\Pi\left(h_{1,\,\beta}\right) \tag{15}$$

avec $h_{1,\,\beta}(x,\,y) \;=\; \beta(x)\,\mathbf{1}_{x\neq y}$, la borne supérieure étant prise sur les fonctions bornées (et boréliennes) β telles que $\displaystyle\int_0^1 \beta^2(x)q(x)\;dx \leq 1$.

Montrer à l'aide de (**??**) que

$$d_2\,(q|\,r) \;\leq\; \sqrt{2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)} \quad \text{et} \quad d_2\,(r|\,q) \;\leq\; \sqrt{2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)}. \tag{16}$$

III. Une première inégalité de concentration

La partie III est indépendante de toutes les autres. Elle établit des résultats que l'on pourra utiliser dans la partie V. Pour aborder la partie V, il est recommandé d'avoir lu la partie III.

On désigne par $\mathbb{P}\{A\}$ la probabilité de l'événement A, et par $\mathbb{E}(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. On sera amené à utiliser l'inégalité simple suivante, appelée inégalité de Chernoff, dont on ne demande pas de démonstration : soient λ un réel > 0 et X une variable aléatoire telle que l'espérance $\mathbb{E}(\exp(\lambda X))$ soit finie. Alors

$$\mathbb{P}\{X \;\geq\; a\} \;\leq\; e^{-\lambda\,a}\,\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

III.1 Une inégalité pour des sommes

Notons $\mathrm{ch}x$ et $\mathrm{sh}x$ les cosinus et sinus hyperboliques de x :

$$\mathrm{ch}x \;=\; \frac{e^x\;+\;e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}x \;=\; \frac{e^x\;-\;e^{-x}}{2}.$$

a) Montrer que l'on a, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\text{ch}\lambda \;\leq\; \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right). \qquad (17)$$

(On pourra utiliser des développements en série entière.)

b) Montrer que si $\lambda \geq 0$ et $x \in [-1,\, 1]$, alors

$$e^{\lambda x} \;\leq\; \text{ch}\lambda \;+\; x\,\text{sh}\lambda \;\leq\; \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \;+\; x\,\text{sh}\lambda\,. \qquad (18)$$

c) Montrer que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et est centrée (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X) = 0$), alors on a

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0\,. \qquad (19)$$

d) En déduire que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et est centrée, alors

$$\mathbb{P}\{|X| \;\geq\; a\} \;\leq\; 2\,\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \quad \text{pour tout } a \geq 0\,. \qquad (20)$$

e) Montrer que si les variables aléatoires indépendantes X_i prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et sont centrées (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ pour chaque i), alors on a

$$\mathbb{P}\left\{\left|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \;\geq\; a\right\} \;\leq\; 2\,\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et tout } a \geq 0\,. \qquad (21)$$

III.2 Optimalité ?

a) Déterminer les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' \;=\; -xy$.

b) Soient

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

la densité et la fonction de répartition de la loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Montrer que

$$1 \;-\; \Phi(x) \;\sim\; \frac{\varphi(x)}{x} \qquad \text{quand } x \to +\infty\,. \qquad (22)$$

c) Est-il possible d'obtenir une inégalité, vraie pour toute suite de variables aléatoires indépendantes X_i à valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et centrées, de la forme

$$\mathbb{P}\left\{\left|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \;\geq\; a\right\} \;\leq\; A\,\exp\left(-\kappa\, a^2\right) \qquad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et tout } a \geq 0\,, \qquad (23)$$

avec des constantes $A \;>\; 0$ et $\kappa \;>\; 1/2$? Pourquoi ?

Cette partie utilise des résultats obtenus dans les parties I et II. Elle est indépendante de la partie III.

On se place maintenant sur $[0,\,1]^n$. Dans le cas où f est de classe C^1 sur le pavé ouvert $]0,\,1[^n$, on note $\nabla f(x)$ son gradient au point x de $]0,\,1[^n$. On note $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $\|\nabla f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (\partial_i f(x))^2$, où $\partial_i f$ désigne de manière abrégée la dérivée partielle de f par rapport à x_i :

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

IV.1 Inégalités pour des fonctions convexes sur $[0,\,1]^n$

a) Dans le cas $n = 1$, montrer que si f est convexe et de classe C^1 sur $]0,\,1[$, alors on a pour tout x et tout y de $]0,\,1[$,

$$f(x) \;-\; f(y) \;\le\; \left|f'(x)\right| \, \mathbf{1}_{x \neq y}\,. \tag{24}$$

b) Dans le cas général $n \geq 1$, montrer que si f est convexe et de classe C^1 sur $]0,\,1[^n$, alors on a pour tout x et tout y de $]0,\,1[^n$,

$$f(x) \;-\; f(y) \;\le\; \sum_{i=1}^n |\partial_i f(x)| \, \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}\,. \tag{25}$$

Comme dans la partie II mais dans le cas $n \geq 1$, soit $\mathbb{B}_{n\times n}$ l'espace vectoriel des fonctions $h : [0,\,1]^n \times [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ bornées (et boréliennes). On dit que la forme linéaire Π sur $\mathbb{B}_{n\times n}$ est positive si $\Pi(h) \geq 0$ lorsque $h \in \mathbb{B}_{n\times n}$ prend des valeurs ≥ 0. Soit $\mathcal{L}_{n\times n}$ l'ensemble des formes linéaires Π sur $\mathbb{B}_{n\times n}$ positives telles que $\Pi(\mathbf{1}) = 1$. Pour toute forme linéaire Π de $\mathcal{L}_{n\times n}$, on définit comme en II les formes linéaires positives Π_1 et Π_2 sur l'espace vectoriel $\mathbb{B}_n$ des fonctions de $[0,\,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ bornées (et boréliennes). On a $\Pi_1(\mathbf{1}) = \Pi_2(\mathbf{1}) = 1$. Lorsqu'il existe des densités ℓ_1 et ℓ_2 telles que l'on ait, respectivement,

$$\Pi_1\,(f) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} \ell_1(x)\,f(x)\;dx \quad \text{et} \quad \Pi_2\,(g) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} \ell_2(y)\,g(y)\;dy$$

pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{B}_n$, on appelle ℓ_1 et ℓ_2 des densités marginales de Π. Toujours comme dans II, on note $\mathcal{L}(q,\,r)$ l'ensemble des formes linéaires Π qui appartiennent à $\mathcal{L}_{n\times n}$ et qui admettent les densités marginales $\ell_1 = q$ et $\ell_2 = r$. Comme dans II, on note $\mathbf{1}_{x\neq y}$ la fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_{x\neq y}(u,\,v) = 1$ pour $u \neq v$ et $\mathbf{1}_{x\neq y}(u,\,v) = 0$ pour $u = v$. De même, pour chaque i on note $\mathbf{1}_{x_i\neq y_i}$ la fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par : $\mathbf{1}_{x_i\neq y_i}(u,\,v) = 1$ pour $u_i \neq v_i$ et $\mathbf{1}_{x_i\neq y_i}(u,\,v) = 0$ pour $u_i = v_i$, où u_i (respectivement, v_i) désigne la i-ème coordonnée de u (respectivement, v). Comme dans II, pour tout couple $(q,\,r)$ de densités à valeurs > 0 sur $[0,\,1]^n$, on définit

$$d_2\,(q|\,r) \;=\; \inf_{\Pi\in\mathcal{L}(q,\,r)} \;\sup_{\alpha}\; \Pi\,(h_{2,\,\alpha}) \tag{26}$$

avec $h_{2,\alpha}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)\, \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des fonctions bornées (boréliennes) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ telles que $\int_{[0,1]^n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2(y)\; r(y)\; dy \leq 1$. On définit de même $d_2(r|\, q)$ en intervertissant les rôles de q et r, à partir des $h_{1,\beta}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\, \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$.

Aucune démonstration des faits ci-dessus n'est demandée.

On SUPPOSE DORÉNAVANT que r est une densité produit > 0, c'est-à-dire que r s'écrit sous la forme d'un produit de densités r_i à valeurs > 0, définies chacune sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$r(y) \;=\; r_1(y_1) \ldots r_n(y_n) \qquad \text{pour tout } y \in [0,1]^n\,. \tag{27}$$

Nous ADMETTONS DORÉNAVANT que si q et r sont des densités à valeurs > 0 sur $[0, 1]^n$ et si r est une densité produit, alors on a les inégalités

$$d_2\,(q|\, r) \;\leq\; \sqrt{2\, \mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)} \quad \text{et} \quad d_2\,(r|\, q) \;\leq\; \sqrt{2\, \mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)} \tag{28}$$

pour tout $n \geq 1$. Des conséquences vont en être déduites dans cette partie et dans la partie V.

IV.2 Résultats intermédiaires

a) On suppose que $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ est convexe, continue sur $[0, 1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et que les dérivées partielles $\partial_i f$, $1 \leq i \leq n$, sont bornées sur $]0,1[^n$. On note

$$I_q\,(f) \;=\; \int_{[0,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, q(x)\, dx\,.$$

Montrer que

$$\int_{[0,1]^n} f(x)\, q(x)\; dx \;-\; \int_{[0,1]^n} f(y)\, r(y)\; dy \;\leq\; \sqrt{2\, I_q\,(f)\;\, \mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)}\,. \tag{29}$$

(Revenir aux définitions de l'écart d_2 ; utiliser les inégalités (??) et (??).)

b) Expliquer brièvement comment adapter ces résultats pour montrer que si $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ est concave, continue sur $[0, 1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et si les fonctions $\partial_i f$ sont bornées sur $]0, 1[^n$, alors, posant

$$I_r\,(f) \;=\; \int_{[0,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, r(x)\, dx\,,$$

on a

$$\int_{[0,1]^n} f(x)\, q(x)\; dx \;-\; \int_{[0,1]^n} f(y)\, r(y)\; dy \;\leq\; \sqrt{2\, I_r\,(f)\;\, \mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)}\,. \tag{30}$$

IV.3 Deux applications

On suppose que $f : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que l'entropie $\mathrm{Ent}_r(e^f)$ au sens de (**??**) soit définie. On notera

$$R\left(e^f\right) = \int e^{f(y)}\, r(y)\; dy \qquad \text{et} \qquad m^f \;\text{ la fonction }\; \frac{e^f}{R\,(e^f)}\,,$$

et on notera r^f la densité $m^f\, r$ sur $[0,\, 1]^n$.

a) Montrer que

$$\mathrm{Ent}_r\left(m^f\right) \;\le\; \int_{[0,\,1]^n} f(x)\, r^f(x)\; dx \;-\; \int_{[0,\,1]^n} f(y)\, r(y)\; dy\,. \tag{31}$$

b) Supposons de plus que f est convexe et de classe C^1 sur $]0,\, 1[^n$, et que les fonctions $\partial_i f$ sont bornées sur $]0,\, 1[^n$. Montrer l'inégalité

$$\mathrm{Ent}_r\left(e^f\right) \;\le\; 2 \int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, e^{f(x)}\, r(x)\; dx\,. \tag{32}$$

(On pourra utiliser IV.2 avec $q = r^f$, puis exprimer $\mathrm{Ent}_r(m^f) = \mathrm{Ent}_r(r^f/r)$.)

c) Si maintenant f est concave et et de classe C^1 sur $]0,\, 1[^n$, et si les fonctions $\partial_i f$ sont bornées sur $]0,\, 1[^n$, déduire brièvement de même l'inégalité

$$\mathrm{Ent}_r\left(e^f\right) \;\le\; 2 \left(\int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, r(x)\, dx\right) \left(\int_{[0,\,1]^n} e^{f(x)}\, r(x)\, dx\right)\,. \tag{33}$$

IV.4 Une inégalité de Poincaré

Déduire de la question précédente l'inégalité suivante, où on demande de préciser la valeur de la constante C. Pour toute fonction $f : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}$ convexe ou concave, continue sur $[0,\, 1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur et dont les dérivées partielles $\partial_i f$ sont bornées,

$$\int_{[0,\,1]^n} f^2(x)\, r(x)\; dx \;-\; \left(\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, r(x)\; dx\right)^2 \;\le\; C \int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, r(x)\; dx\,. \tag{34}$$

*(Appliquer (**??**) à εf en faisant tendre ε vers 0. On pourra commencer, pour simplifier, par se ramener au cas où $\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, r(x)\, dx = 0$.)*

V. Deuxième application : inégalités de concentration

*Cette partie utilise des résultats établis dans les parties I à IV. On se place dans le même cadre que dans la partie IV, et on fait les mêmes hypothèses, en particulier (**??**) et (**??**).*

Rappelons que comme dans la partie IV, nous supposons que r est une densité produit > 0, et nous admettons (**??**).

V.1 Cas concave de classe C^1

On suppose que $f : [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ est concave, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et que les fonctions $\partial_i f$ sont bornées. Notons τ^2 l'intégrale $I_r(f)$ définie en IV.2, et posons

$$R(f) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} f(x)\, r(x)\; dx \qquad \text{et} \qquad m(x) \;=\; \frac{q(x)}{r(x)}.$$

a) Montrer qu'on a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_{[0,\,1]^n} \left(\lambda\,(f(x) \;-\; R(f)) \;-\; \frac{\tau^2\lambda^2}{2} \right) m(x)\, r(x)\; dx \;\leq\; \mathrm{Ent}_r\,(m)\;. \tag{35}$$

b) Expliciter (**??**) dans le cas où m est de la forme $e^{\ell}/R(e^{\ell})$. En déduire que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_{[0,\,1]^n} e^{\lambda(f(x) - R(f))}\, r(x)\; dx \;\leq\; \exp\left(\frac{\tau^2\lambda^2}{2}\right). \tag{36}$$

c) En déduire que si $X_1, \ldots, X_n$ désignent des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0,\,1]$ dont les lois respectives admettent chacune une densité strictement positive sur $[0,\,1]$, alors pour toute fonction $f : [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ concave, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et dont les dérivées partielles $\partial_i f$ sont bornées, notant $\tau^2 = \mathbb{E}(\,\|\nabla f(X_1, \ldots, X_n)\|^2\,)$, on a pour tout réel $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}\{\, f\,(X_1, \ldots, X_n) \;-\; \mathbb{E}(f\,(X_1, \ldots, X_n)) \;\geq\; a\,\} \;\leq\; \exp\left(-\,\frac{a^2}{2\tau^2}\right). \tag{37}$$

V.2 Cas convexe de classe C^1

On suppose maintenant que $f : [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ est convexe, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et que les fonctions $\partial_i f$ sont bornées. Notons $\rho^2_{\max}$ la borne supérieure de $\|\nabla f(x)\|^2$ sur $]0, 1[^n$.

Montrer que sous les mêmes hypothèses que dans la question V.1.c, on a pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}\{\, f\,(X_1, \ldots, X_n) \;-\; \mathbb{E}(\,f\,(X_1, \ldots, X_n)) \;\geq\; a\,\} \;\leq\; \exp\left(-\,\frac{a^2}{2\rho^2_{\max}}\right). \tag{38}$$

Appendice

V.3 Une inégalité dans les espaces de Banach

Question V.3 : Soit E un espace de Banach, de norme $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$. Soit E' son dual topologique (c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E), muni de la norme associée $\|\cdot\|_{\mathrm{E}'}$. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de E.

Montrer que si les variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ prennent leurs valeurs dans $[-1,\,1]$ et si leurs lois respectives admettent chacune une densité strictement positive sur $[-1,\,1]$, alors pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} X_i\, b_i \right\|_{\mathrm{E}} - \mathbb{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} X_i\, b_i \right\|_{\mathrm{E}} \right) \right| \geq a \right\} \;\leq\; 2\,\exp\left(-\,\frac{a^2}{8\sigma_n^2}\right), \tag{39}$$

où

$$\sigma_n^2 = \sup_{\xi \in E' \,:\, \|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi\left(b_i\right)\right)^2 \,, \tag{40}$$

la borne supérieure portant sur l'ensemble des formes linéaires continues ξ sur E de norme associée $\|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1$.

VI Cas $n \geq 2$

Établir (**??**) dans le cas général.